Université A/Mira de Béjaia
Département d'Informatique
2e année Licence Académique (2017/2018).

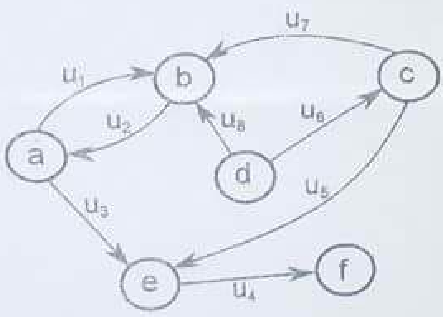
Date : 27/05/2018

Examen de Théorie des Graphes
Durée 1h30

Exercice 1. (05 pts)

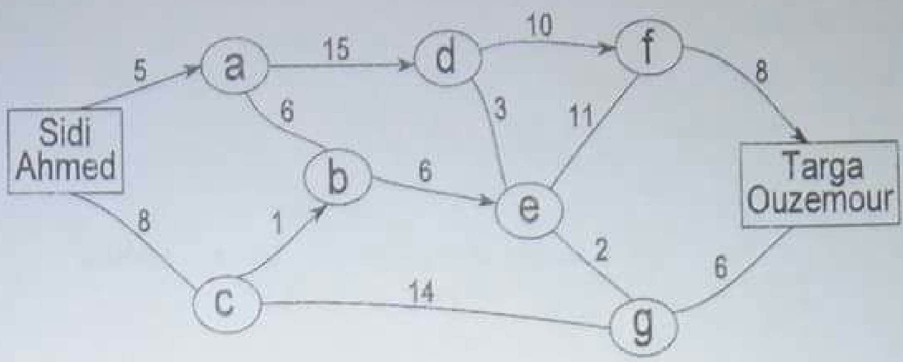
1. Peut-on construire un graphe simple ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés différents ?(Raisonner par l'absurde).
2. Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ? Justifiez ?
3. Combien d'arêtes contiennent les graphes K_{11} et $K_{6,7}$?
4. A quoi ressemle bl un graphe de nombre chromatique 1 ?
5. Quel est le nombre chromatique d'un arbre ? d'un graphe biparti ? d'un graphe complet ?

Exercice 2. (07.50 pts) Soit le graphe G suivant :



1. Donner la matrice M d'incidence aux arcs de G.
2. En utilisant la matrice M, comment calculer le demi-degré intérieur, le demi-degré extérieur, et le degré d'un sommet x donné.
3. Déduire si G est simple, symétrique, et complet. Justifier.
4. G admet-il un partitionnement en niveaux ? Justifier.
5. $N = \{a, c, f\}$ est-il un noyau du graphe G ? Justifier.
6. G est-il Hamiltonien ? Justifier.

Exercice 3. (07.50 pts) Samira habite Sidi Ahmed et travaille à Targa Ouzemour. Elle effectue donc un aller et retour chaque jour en voiture. Ayant énormément de peine à se lever, elle aimerait trouver le chemin lui permettant de repousser le plus tard possible l'heure de son départ tout en arrivant au travail à 8h00.
Voici le réseau des routes qu'elle peut emprunter pour se rendre de Sidi Ahmed à Targa Ouzemour :



Les sommets représentent les carrefours, les **arcs** les rues à sens unique et **les arêtes** les rues à double sens. Les valeurs sur les arcs et les arêtes représentent le temps de parcours nécessaire en minutes pour rejoindre deux carrefours dans un sens ou dans l'autre (s'il est permis).

1. Donner le graphe orienté correspondant.
2. Déterminer le chemin que Samira doit emprunter, lui permettant de partir le plus tard de chez elle et d'arriver à l'heure à Targa Ouzemour. Justifier le choix de l'algorithme utilisé.
3. A qu'elle heure doit-elle partir ?

** Afud igerrzen * Bon courage **

Université de Béjaïa
Département Informatique (Faculté des Sciences exactes)
Année (2017/2018)

Corrigé de l'examen Théorie des graphes

Exercice n°1 : (3,5 pts)

1. La matrice d'incidence :

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\
\hline
a & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
e & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
f & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

0,5

2. En utilisant la matrice d'incidence
$d^+(x)$ = nbre de (+1) de la ligne de x
$d^-(x)$ = nbre de (-1) de la ligne de x
$d(x)$ = nbre de (±1) .. " " de x

0,75

3. Propriétés.
- 1-graphe : non car (a,b) … 1-graphe : pas de boucle. 0,5
- Symétrique : non car … les arcs … pas par opposé. 0,5
- Complet : non, car on a $m = |U| \neq \frac{n(n-1)}{2}$ … On a pas 2 arcs dans … n'est pas complet. 0,5

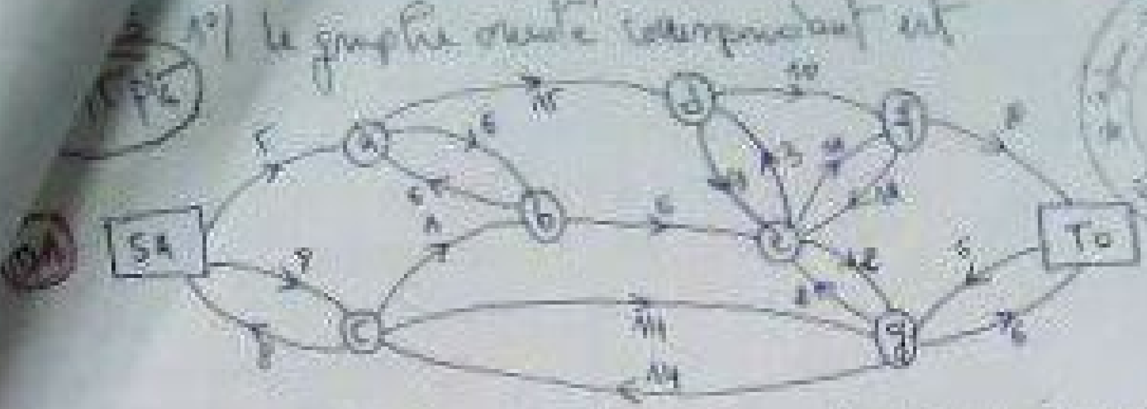
4. G ne possède pas un partitionnement en … car X possède un circuit. 0,5

5. Soit $N = \{a, c, f\}$.
N est un noyau si { il est stable et absorbant. 0,5

On a : N est stable. 0,5

1,5 pts

1) Le graphe orienté correspondant est



2) On utilise l'algorithme de Dijkstra car toutes les longueurs sont positives (on ne peut pas utiliser l'algo de Bellman car le réseau admet des circuits)

0,5

⊛ Application de l'algorithme de Dijkstra

Itération	x	SA	a	b	c	d	e	f	g	To
00	π(x)	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
01	π(x)	—	5	∞	8	∞	∞	∞	∞	∞
02	π(x)	—	—	11	8	20	∞	∞	∞	∞
03	π(x)	—	—	9	—	20	∞	∞	22	∞
04	π(x)	—	—	—	—	20	15	∞	22	∞
05	π(x)	—	—	—	—	18	—	26	17	∞
06	π(x)	—	—	—	—	18	—	26	—	23
07	π(x)	—	—	—	—	—	—	26	—	23
08	π(x)	—	—	—	—	—	—	26	—	—

Itération 01 on pose $S = \{x = SA\}$

$\pi(SA) = 0$, $\pi(x) = +\infty$, $\forall x \in X \setminus S$, $A = \phi$ 0,5

$\tilde{x} = SA$, on examine les arcs (SA, a) et (SA, c)

$\pi(a) = \pi(SA) + d(SA, a) = 0 + 5 < \infty \Rightarrow \pi(a) = 5$ et $A(a) = (SA, a)$

$\pi(c) = \pi(SA) + d(SA, c) = 0 + 8 < \infty \Rightarrow \pi(c) = 8$ et $A(c) = (SA, c)$

$\tilde{x} = 5$, $S = \{SA, a\}$, $A = \{(SA, a)\}$.

Itération 2 : on examine les arcs (a, b) et (a, d) 0,5

$\pi(b) = \pi(a) + d(a, b) = 5 + 6 < \infty \Rightarrow \pi(b) = 11$ et $A(b) = (a, b)$

$\pi(d) = \pi(a) + d(a, d) = 5 + 15 = 20 < \infty \Rightarrow \pi(d) = 20$ et $A(d) = (a, d)$

$\tilde{x} = c$, $S = \{SA, a, c\}$, $A = A \cup \{(SA, c)\}$ 0,5

Itération 03 : on examine les arcs (c, b) et (c, g).

- $\pi(b) = \pi(c) + d(c, b) = 8 + 1 = 9 < 11 \Rightarrow \pi(b) = 9$ et $A(b) = (c, b)$
- $\pi(g) = \pi(c) + d(c, g) = 8 + 14 = 22 < \infty \Rightarrow \pi(g) = 22$ et $A(g) = (c, g)$

$\tilde{x} = b$, $S = \{SA, a, c, b\}$, $A = A \cup \{(c, b)\}$ 0,5

Itération 04 : on examine l'arc (b, e)

- $\pi(e) = \pi(b) + d(b, e) = 9 + 6 = 15 < \infty \Rightarrow \pi(e) = 15$ et $A(e) = (b, e)$

$\tilde{x} = e$, $S = \{SA, a, c, b, e\}$, $A = A \cup \{(b, e)\}$ 0,5

Itération 05 : on examine les arcs (e, d), (e, f) et (e, g)

- $\pi(d) = \pi(e) + d(e, d) = 15 + 3 = 18 < 20 \Rightarrow \pi(d) = 18$ et $A(d) = (e, d)$
- $\pi(f) = \pi(e) + d(e, f) = 15 + 11 = 26 < \infty \Rightarrow \pi(f) = 26$ et $A(f) = (e, f)$
- $\pi(g) = \pi(e) + d(e, g) = 15 + 2 = 17 < 22 \Rightarrow \pi(g) = 17$ et $A(g) = (e, g)$

$S = \{SA, a, c, b, e, g\}$; $A = A \cup \{(e, g)\}$

Itération 8 : on examine l'arc (g, TD)

$\pi(TD) = \pi(g) + l(g, TD) = 18 + 5 = 23$ [illegible] $\pi(TD) = 23$ et $A(TD) = (g, TD)$

$\bar{x} = d$, $S = \{SA, a, c, b, e, g, d\}$; $A = A \cup \{(e, d)\}$

Itération 9 : on examine l'arc (d, f)

$\pi(f) = \pi(d) + l(d, f) = 19 + 10 = 29 > 26$ [illegible] $\pi(f) = 26$, $A(f) = (?, f)$

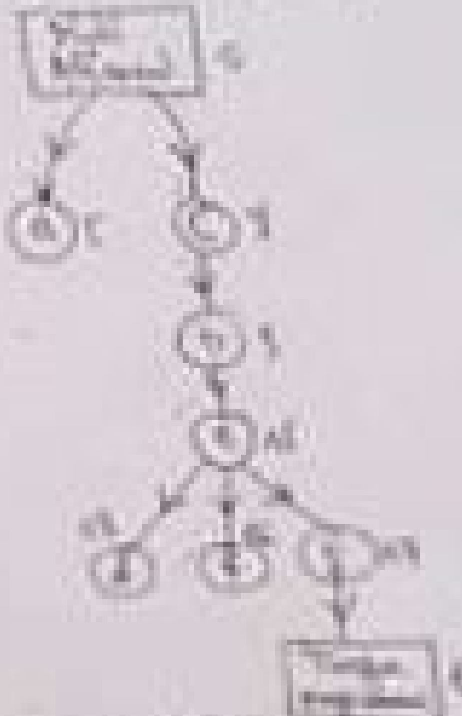
→ aucune amélioration des potentiels

$\bar{x} = TD$, $S = \{SA, a, c, b, e, g, d, TD\}$; $A = A \cup \{(g, TD)\}$

Itération 10 : Il n'y a pas d'arc à examiner

$\bar{x} = f$, $S = X$; $A = A \cup \{(?, f)\} = \{(SA, a), (SA, c), (c, b), (b, e), (e, g), (e, d), (g, TD), (?, f)\}$

L'arbre final (X, A) est l'arborescence des plus courtes distances obtenue qui est donnée comme suit



5) La durée du plus court chemin de [illegible] à [illegible] est de 23 mn. [illegible] partir à [illegible] pour arriver à [illegible] à [illegible].

Le plus court chemin qu'elle doit emprunter est :

$SA \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow e \longrightarrow g \longrightarrow TD$

N est absorbant car $\forall x \in X$, si $x \notin N$ alors $\exists y \in N /$ $y \in \Gamma(x)$ 0,5

En vérifiant, on trouve que N est absorbant.

donc N est un noyau. [illegible]

5. G est-il hamiltonien ???

G est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien. [illegible]

(un cycle est dit hamiltonien s'il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe)

Le graphe G ne peut pas être hamiltonien car le sommet [illegible] a un degré 1.